Grado en Matemáticas – Ejercicios de Análisis Funcional

Relación 5 - Los tres principios fundamentales del Análisis Funcional

1. Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $u \in X \setminus M$. Prueba que $f : M + \mathbb{K}u \to \mathbb{K}$ dada por $f(m + \lambda u) = \lambda$ es una forma lineal bien definida y es continua si, y sólo si, $u \notin \overline{M}$, en cuyo caso, $\|f\| = 1/\operatorname{dist}(u, M)$.

2. Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $u \in X$. Prueba que existe $f \in X^*$ tal que $|f(x)| \leqslant \operatorname{dist}(x, M)$ para todo $x \in X$ y $f(u) = \operatorname{dist}(u, M)$.

3. Consideremos el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ dado por $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 2x = 0\}$ y el funcional $f : M \to \mathbb{R}$ dado por $f(x, y) = x$ para todo $(x, y) \in M$. Calcula una extensión Hahn-Banach de f en ℓ_2^2 y comprueba que es única. Estudia el mismo problema en ℓ_1^2.

4. Se considera el espacio normado real ℓ_1 y el subespacio

$$M = \{x \in \ell_1 : x(1) - 3x(2) = 0\}$$

   Calcula una extensión Hahn-Banach del funcional $f : M \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x(1)$ para todo $x \in M$.

5. a) Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $f : M \to \mathbb{K}$ un funcional lineal continuo. Prueba que el funcional $F : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ dado por $F(x) = f(P_M(x))$ donde P_M es la proyección ortogonal sobre M es la única extensión Hahn-Banach de f.

   b) En el caso en que M sea un hiperplano dado por $M = \{x \in \mathcal{H} : (x \mid a) = 0\}$, donde $a \in \mathcal{H}$ y $a \neq 0$, y $f : M \to \mathbb{K}$ venga dado por $f(x) = (x \mid b)$, prueba que la única extensión Hahn-Banach de f viene dada por

$$F(x) = (x \mid b) - \frac{(a \mid b)}{\|a\|^2}(x \mid a) \quad (x \in \mathcal{H})$$

   c) Sea $M = \left\{ f \in L_2[0, 1] : \int_0^1 x f(x)\, \mathrm{d}x = 0 \right\}$ y sea $\varphi : M \to \mathbb{K}$ el funcional lineal y continuo $\varphi(f) = \int_0^1 x^2 f(x)\, \mathrm{d}x$ para todo $f \in M$. Calcula la única extensión Hahn-Banach de φ.

6. Prueba que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $f \in C[0,1]^*$ verificando que $f(p) = p'(0)$ para todo polinomio p de grado menor o igual que N.¿Existe un funcional lineal y continuo f en $C[0,1]$ tal que $f(p) = p'(0)$ para todo polinomio p?

7. Sea X un espacio normado y $x \in S_X$. Prueba que existe un subespacio cerrado M de X tal que $X = M \oplus \mathbb{K}\,x$ y $\operatorname{dist}(x, M) = 1$.

8. Sea M un subespacio vectorial de un espacio normado X y $T \in L(M, \ell_\infty)$. Prueba que existe $S \in L(X, \ell_\infty)$ que extiende a T y $\|S\| = \|T\|$.

9. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal con la propiedad de que para todos $x, y \in \mathcal{H}$ se verifica que $\big(T(x)\big|y)\big) = \big(x\big|T(y)\big)$. Prueba que T es continuo.

10. Sea X un espacio normado y $f : \mathbb{C} \to X$ una función entera, es decir, derivable en $\mathbb{C}$. Prueba que si f está acotada entonces es constante.

11. Prueba que si X es un espacio normado reflexivo y $x^* \in X^*$, entonces existe $x \in S_X$ tal que $x^*(x) = \|x^*\|$.

12. Sea X un espacio de Banach. Prueba que si X^* contiene un subespacio cerrado propio que separa los puntos de X, entonces X no es reflexivo.

13. La aplicación identidad $I_d : (\ell_1, \|\,.\,\|_1) \to (\ell_1, \|\,.\,\|_\infty)$ es continua. ¿Es continua su inversa? ¿Contradice esto el teorema de los isomorfismos de Banach?

14. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Se define una nueva norma en X mediante la expresión $|||x||| = \|x\| + \|T(x)\|$ para todo $x \in X$. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) T es continua.

    b) $\|\,.\,\|$ y $|||\,.\,|||$ son normas equivalentes.

    c) $|||\,.\,|||$ es una norma completa en X.

15. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Prueba que T es inyectiva y $T(X)$ es cerrado en Y si, y sólo si, existe $m > 0$ tal que $\|T(x)\| \geqslant m\|x\|$ para todo $x \in X$.

16. Sea M un subespacio cerrado de ℓ_p y de ℓ_q. Prueba que las normas inducidas en M por ℓ_p y ℓ_q son equivalentes.

17. Sea $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para todo $x \in \ell_1$ se verifica que la sucesión $\{x(n)u(n)\}$ está acotada. Prueba que $u \in \ell_\infty$.

18. Sea $p > 1$ y $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para todo $y \in \ell_p$ la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} x(n)y(n)$ es convergente. Prueba que $x \in \ell_q$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

19. Prueba que si X e Y son espacios normados, $T : X \to Y$ es un operador lineal con gráfica cerrada y $T(X)$ tiene dimensión finita, entonces T es continuo.

20. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y F un subconjunto de $L(X, Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) F está acotado.

    b) Para cada $x \in X$ y cada $g \in Y^*$ el conjunto $\{g(T(x)) : T \in F\}$ está acotado.

21. Sean X e Y espacios de Banach, y $A \subset Y^*$ tal que A separa los puntos de Y. Prueba que si $T : X \to Y$ es una aplicación lineal tal que $f \circ T \in X^*$ para todo $f \in A$, entonces T es continua.

22. Sea X un espacio de Banach. Dada una aplicación lineal $T : X \to \ell_\infty$ se considera, para cada $n \in \mathbb{N}$, el funcional lineal $T_n : X \to \mathbb{K}$ definido por:

$$T_n(x) = [T(x)](n) \quad (x \in X)$$

    Prueba que T es continua si, y sólo si, $T_n \in X^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

23. Sea $T : c_0 \to c_0$ la aplicación lineal definida por

$$[T(x)](n) = \frac{1}{n}x(n) \quad (x \in c_0, n \in \mathbb{N})$$

    ¿Es T continua? ¿Es T abierta? ¿Es $T(c_0)$ densa en c_0?